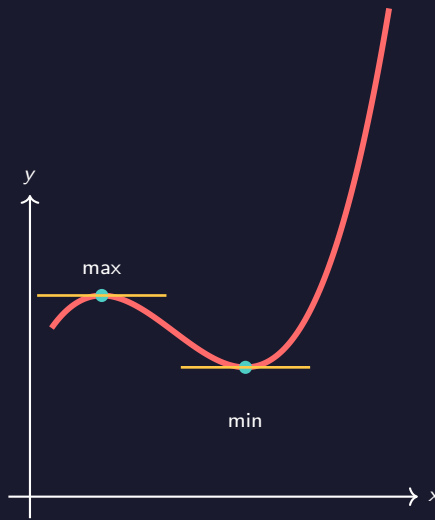


FICHE 04

# Variations & courbes

Signe de  $f'$  & variations ■ Extremums ■ Optimisation



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Pourquoi étudier les variations ?</b>	<b>3</b>
1.1	Le problème fondamental . . . . .	3
1.2	L'idée directrice . . . . .	3
<b>2</b>	<b>L'idée avant la formule</b>	<b>4</b>
2.1	La dérivée indique la pente . . . . .	4
2.2	L'extremum : quand la pente change de signe . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Le cours complet</b>	<b>5</b>
3.1	Le théorème fondamental . . . . .	5
3.2	La méthode du tableau de variations . . . . .	5
3.3	Extremums . . . . .	6
3.4	Optimisation . . . . .	6
3.5	Inégalités par étude de fonction . . . . .	6
3.6	Position relative de deux courbes . . . . .	7
3.7	Application au trinôme du second degré . . . . .	7
3.8	Lecture graphique de la dérivée . . . . .	8
3.9	Synthèse : étude complète d'une fonction . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Boîte à outils : réflexes pour le bac</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Exercices</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Problème : Étude complète d'une cubique ★★★</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>✓ Corrigés détaillés</b>	<b>16</b>

# 1 Pourquoi étudier les variations ?

## 1.1 Le problème fondamental

Une fois qu'on sait **dériver** (fiche précédente), une question naturelle se pose : à quoi ça sert ? La réponse est spectaculaire. Le signe de la dérivée  $f'$  permet de **connaître les variations** de  $f$  sans calculer des dizaines de valeurs : là où  $f' > 0$ , la fonction monte ; là où  $f' < 0$ , elle descend. On peut alors trouver les **maximums et minimums**, tracer précisément une courbe, résoudre des problèmes d'**optimisation** et même **démontrer des inégalités**.

**Extremums**  
maximum,  
minimum

**Optimisation**  
volume, coût,  
bénéfice

**Tracer**  
une courbe  
fidèlement

**Inégalités**  
prouver  
 $f(x) \geq 0$

**Extremums.** En un sommet (max) ou un creux (min), la tangente est **horizontale** : la dérivée s'annule. C'est le point de départ de toute recherche d'optimum.

**Optimisation.** « Quel est le volume maximal d'une boîte ? », « quel prix maximise le bénéfice ? » : on exprime la quantité à optimiser comme une fonction, et on cherche son extremum grâce à  $f'$ .

**Tracer et comparer.** Le tableau de variations donne l'allure exacte d'une courbe. Étudier le signe de  $f - g$  permet de savoir quelle courbe est **au-dessus** de l'autre.

## 1.2 L'idée directrice

### L'idée directrice :

Le **signe de  $f'$**  gouverne les **variations** de  $f$ . Étudier une fonction se résume à : calculer  $f'$ , étudier son signe, en déduire un **tableau de variations**. Les **extremums** se trouvent là où  $f'$  **change de signe**. C'est l'outil universel pour optimiser, tracer et comparer.

### Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

C'est l'aboutissement de la dérivation : on transforme un calcul ( $f'$ ) en information visuelle (les variations). Cette méthode te servira sur **toutes** les fonctions de Première et de Terminale (polynômes, exponentielle, et plus tard logarithme). L'optimisation est de plus un grand classique des problèmes du bac.

## 2 L'idée avant la formule

### 2.1 La dérivée indique la pente

#### Intuition | Monter, descendre, ou faire une pause

Imagine que tu marches le long de la courbe de  $f$ , de gauche à droite. À chaque pas, la **tangente** t'indique si tu montes ou si tu descends, et sa pente est  $f'$ .

- Si  $f'(x) > 0$  : la pente est positive, **tu montes** (fonction croissante).
- Si  $f'(x) < 0$  : la pente est négative, **tu descends** (fonction décroissante).
- Si  $f'(x) = 0$  : la pente est nulle, tu es sur un **palier** : souvent un sommet ou un creux.

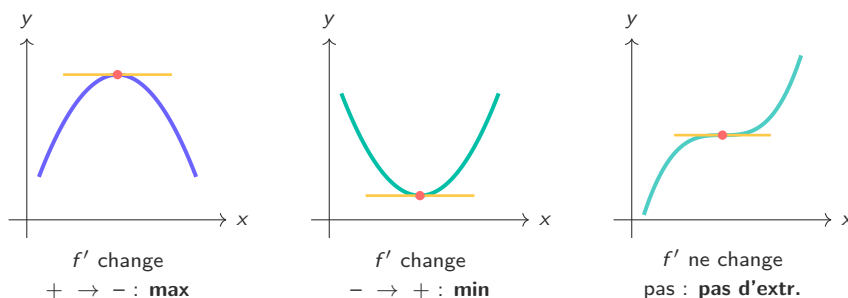
La dérivée est donc une sorte de **GPS de la pente** : son signe seul suffit à reconstituer toute la « topographie » de la courbe.

### 2.2 L'extremum : quand la pente change de signe

#### Intuition | Au sommet, on est à plat

Au sommet d'une colline, juste avant tu montais ( $f' > 0$ ), juste après tu descends ( $f' < 0$ ) : entre les deux, à l'instant précis du sommet, la pente est **nulle** ( $f' = 0$ ) et la tangente est horizontale. C'est ainsi qu'on **repère** les extremums : ce sont les endroits où  $f'$  **s'annule en changeant de signe**.

**Attention** : il ne suffit pas que  $f'$  s'annule. Si  $f'$  s'annule **sans changer de signe** (comme pour  $x^3$  en 0), il n'y a **pas** d'extremum : juste un petit palier.



### 3 Le cours complet

#### 3.1 Le théorème fondamental

##### ★ Théorème | Signe de la dérivée et sens de variation

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $I$  (sauf éventuellement en quelques points isolés où  $f'$  s'annule), alors  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$ .
- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x$  de  $I$ , alors  $f$  est **strictement décroissante** sur  $I$ .
- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x$  de  $I$ , alors  $f$  est **constante** sur  $I$ .

(Ce théorème est **admis** en Première.)

##### Attention | « Sur un intervalle » : c'est essentiel

Le lien signe de  $f'$  / variations n'est valable que **sur un intervalle**. Par exemple  $f(x) = \frac{1}{x}$  a pour dérivée  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ , mais  $f$  n'est pas décroissante « sur  $\mathbb{R}^*$  » (qui n'est pas un intervalle) : elle est décroissante **séparément** sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $] 0 ; +\infty[$ .

#### 3.2 La méthode du tableau de variations

##### Méthode | Étudier les variations d'une fonction

1. **Domaine** : préciser l'ensemble d'étude.
2. **Dériver** : calculer  $f'(x)$  et la mettre sous forme **factorisée** (pour lire son signe).
3. **Signe de  $f'$**  : étudier le signe de  $f'(x)$  (souvent un trinôme : « signe de  $a$  sauf entre les racines »).
4. **Tableau** : reporter le signe de  $f'$ , en déduire les flèches de variation de  $f$ , et calculer les valeurs aux points clés (extremums, bornes).

##### Exemple | Étude complète

Soit  $f(x) = x^3 - 3x$  sur  $\mathbb{R}$ . On calcule  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$ . Ce trinôme ( $a = 3 > 0$ ) est positif à l'extérieur de  $[-1 ; 1]$  et négatif entre  $-1$  et  $1$ . On calcule  $f(-1) = -1 + 3 = 2$  (maximum local) et  $f(1) = 1 - 3 = -2$  (minimum local).

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$		$2$	$-2$		

$f$  croît jusqu'à  $x = -1$  (max local 2), décroît jusqu'à  $x = 1$  (min local -2), puis recroît.

### 3.3 Extremums

#### Définition | Extremum local

$f$  admet un **maximum local** en  $a$  si, pour  $x$  proche de  $a$ ,  $f(x) \leq f(a)$ . (De même pour un **minimum local** avec  $f(x) \geq f(a)$ .) Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

#### ★ Théorème | Extremum et dérivée

Si  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert et admet un extremum local **à l'intérieur** en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$  : la tangente est **horizontale** en ce point.

**Réciproque fausse** :  $f'(a) = 0$  **n'implique pas** qu'il y ait un extremum. Il y a extremum seulement si  $f'$  **change de signe** en  $a$ .

#### Attention | Le contre-exemple $x^3$

Pour  $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$  s'annule en 0, mais  $f'(x) \geq 0$  partout (le signe ne change pas) :  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , il n'y a **pas** d'extremum en 0, juste un « point d'inflexion à tangente horizontale ». Conclusion : pour un extremum, exige toujours un **changement de signe** de  $f'$ .

### 3.4 Optimisation

#### Méthode | Résoudre un problème d'optimisation

1. **Choisir la variable** (souvent une longueur) et préciser son **intervalle** de variation.
2. **Exprimer** la quantité à optimiser (aire, volume, coût...) comme une fonction de cette variable.
3. **Dérivée**, étudier le signe de la dérivée, dresser le tableau de variations.
4. **Conclure** : lire l'extremum et répondre à la question posée (sans oublier les unités).

#### Exemple | Le champ rectangulaire

Avec 40 m de clôture, quelle aire maximale pour un rectangle ? On note  $x$  la largeur ( $0 < x < 20$ ). L'aire est  $A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$ . Alors  $A'(x) = -2x + 20$ , qui s'annule en  $x = 10$  :  $A' > 0$  avant,  $A' < 0$  après, donc **maximum** en  $x = 10$ . L'aire maximale est  $A(10) = 100 \text{ m}^2$  (un carré de côté 10).

### 3.5 Inégalités par étude de fonction

#### Méthode | Démontrer une inégalité $f(x) \geq 0$

Pour montrer que  $f(x) \geq 0$  sur un intervalle : on étudie les variations de  $f$  et on montre que son **minimum** est positif ou nul. Si le minimum de  $f$  vaut  $m \geq 0$ , alors  $f(x) \geq m \geq 0$  pour tout  $x$ .

**Exemple | Une inégalité**

Montrons que  $x^3 - 3x + 2 \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ . Soit  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ . Alors  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$  ; sur  $[0; +\infty[$ ,  $f'$  est négative sur  $[0; 1]$  et positive ensuite :  $f$  admet un **minimum** en  $x = 1$ , et  $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ . Donc  $f(x) \geq f(1) = 0$  : l'inégalité est prouvée.

**3.6 Position relative de deux courbes****Méthode | Comparer deux courbes**

Pour comparer les courbes de  $f$  et  $g$  : on étudie le **signe de la différence**  $d(x) = f(x) - g(x)$ .

- $d(x) > 0$  : la courbe de  $f$  est **au-dessus** de celle de  $g$  ;
- $d(x) < 0$  : la courbe de  $f$  est **en dessous** ;
- $d(x) = 0$  : les courbes se **croisent** (point d'intersection).

**Exemple | Position relative**

Comparons  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = 2x - 1$ . On étudie  $d(x) = x^2 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ . Donc la courbe de  $f$  est **toujours au-dessus** de la droite, et elles se touchent en  $x = 1$  (la droite est tangente à la parabole).

**3.7 Application au trinôme du second degré****✓ Propriété | Retrouver les variations d'un trinôme**

Pour  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , on a  $f'(x) = 2ax + b$ , qui s'annule en  $x = -\frac{b}{2a}$  (l'abscisse du **sommet**). Le signe de  $f'$  redonne exactement les variations vues à la fiche 2 : si  $a > 0$ ,  $f$  décroît puis croît (minimum au sommet) ; si  $a < 0$ ,  $f$  croît puis décroît (maximum au sommet). La dérivation **confirme** et généralise l'étude du second degré.

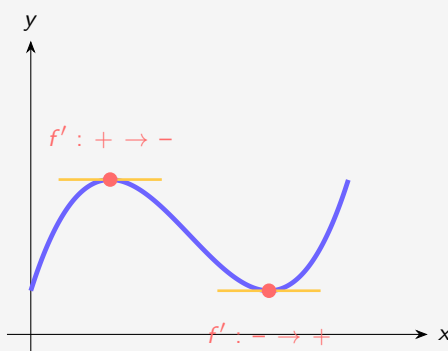
### 3.8 Lecture graphique de la dérivée

#### Méthode | Passer de la courbe de $f$ au signe de $f'$ (et inversement)

- Là où la courbe de  $f$  **monte**,  $f' > 0$  ; là où elle **descend**,  $f' < 0$ .
- Aux **sommets et creux** (tangente horizontale),  $f' = 0$ .
- Inversement, si on connaît le **signe de  $f'$** , on en déduit les flèches de variation de  $f$ .

#### Exemple | Lire $f'$ sur la courbe de $f$

La courbe ci-dessous monte jusqu'à un sommet en  $x = 1$ , redescend jusqu'à un creux en  $x = 3$ , puis remonte.



On en déduit immédiatement :  $f' > 0$  sur  $]0; 1[$ ,  $f'(1) = 0$ ,  $f' < 0$  sur  $]1; 3[$ ,  $f'(3) = 0$ ,  $f' > 0$  sur  $]3; 4[$ . Le sommet en  $x = 1$  est un **maximum**, le creux en  $x = 3$  un **minimum**.

### 3.9 Synthèse : étude complète d'une fonction

#### Méthode | Le plan type d'une étude de fonction

1. Préciser le **domaine** (et une éventuelle parité/symétrie).
2. Calculer et **factoriser**  $f'(x)$ .
3. Étudier le **signe** de  $f'$ , dresser le **tableau de variations** avec les valeurs clés.
4. Calculer quelques **points utiles** (ordonnée à l'origine, intersections avec l'axe des abscisses) et **tracer** l'allure.

#### Exemple | Étude complète d'une fonction de degré 4

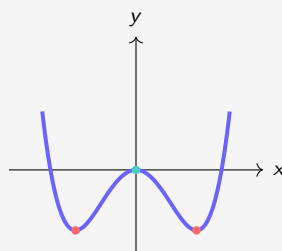
Soit  $f(x) = x^4 - 2x^2$  sur  $\mathbb{R}$ . **Parité** :  $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$ , donc  $f$  est **paire** (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

**Dérivée** :  $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$ , qui s'annule en  $-1$ ,  $0$  et  $1$ . Valeurs :  $f(0) = 0$ ,  $f(-1) = f(1) = 1 - 2 = -1$ .



$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$								

$f$  admet **deux minimums** (valeur  $-1$  en  $x = -1$  et  $x = 1$ ) et un **maximum local** (valeur  $0$  en  $x = 0$ ) : c'est la célèbre courbe « en W ».



## 4 Boîte à outils : réflexes pour le bac

### Méthode | Les réflexes essentiels

1.  $f' > 0 \Rightarrow$  **croissante**,  $f' < 0 \Rightarrow$  **décroissante**,  $f' = 0$  **partout**  $\Rightarrow$  **constante**.
2. **Toujours factoriser**  $f'$  pour lire son signe facilement.
3. **Extremum**  $\Leftrightarrow f'$  **change de signe** (pas seulement  $f' = 0$ ).
4. **Optimisation** : variable  $\rightarrow$  fonction  $\rightarrow$  dérivée  $\rightarrow$  tableau  $\rightarrow$  conclusion (+ unités).
5. **Inégalité**  $f \geq 0$  : montrer que le minimum de  $f$  est  $\geq 0$ .
6. **Position de deux courbes** : étudier le signe de  $f - g$ .
7. **Sur un intervalle** seulement :  $\frac{1}{x}$  décroît sur chaque intervalle, pas sur  $\mathbb{R}^*$ .

## Méthode | Mots-clés à repérer

## Tu lis dans l'énoncé...

## Tu penses à...

« étudier les variations »	dériver, signe de $f'$ , tableau
« maximum / minimum / optimal »	$f' = 0$ avec changement de signe
« volume / aire / coût maximal »	problème d'optimisation
« montrer que $f(x) \geq 0$ »	étudier le minimum de $f$
« position relative / au-dessus »	signe de $f(x) - g(x)$
« tangente horizontale »	$f'(a) = 0$

## Attention | Top 5 des erreurs à éviter

1. **Conclure à un extremum dès que  $f' = 0$**  sans vérifier le changement de signe.
2. **Oublier de factoriser  $f'$** , ce qui rend le signe illisible.
3. **Annoncer « décroissante sur  $\mathbb{R}^*$  »** alors que ce n'est pas un intervalle.
4. **Oublier l'intervalle de la variable** dans un problème d'optimisation.
5. **Confondre  $f'$  et  $f$**  dans le tableau (la ligne des signes est celle de  $f'$ ).

## Méthode | Algorithme : méthode de Newton

La méthode de Newton approche une solution de  $f(x) = 0$  en suivant les tangentes. Dans des cas favorables, elle converge très vite.

```

1 def f(x):
2     return x**2 - 2          # on cherche une racine : ici racine(2)
3
4 def fprime(x):
5     return 2*x
6
7 def newton(x0, n):
8     x = x0
9     for k in range(n):
10        x = x - f(x) / fprime(x)    # on suit la tangente
11    return x
12
13 print(newton(2, 5))          # approche tres precise de racine(2)

```

## 5 Exercices

### Exercice 1 ★★ : Du signe de $f'$ aux variations

On donne le signe de la dérivée d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) > 0$  sur  $] -\infty ; -2[$ ,  $f'(-2) = 0$ ,  $f'(x) < 0$  sur  $] -2 ; 3[$ ,  $f'(3) = 0$ ,  $f'(x) > 0$  sur  $] 3 ; +\infty[$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. Préciser la nature (max ou min) des extremums en  $-2$  et en  $3$ .

### Exercice 2 ★★ : Dériver et donner le signe

Pour chaque fonction, calculer  $f'(x)$  et étudier son signe.

a)  $f(x) = x^2 - 6x + 5$

c)  $h(x) = x^3 - 3x^2$

b)  $g(x) = -x^2 + 4x$

d)  $k(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

### Exercice 3 ★★ : Tableau de variations d'un trinôme

Soit  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ . Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser son minimum.

### Exercice 4 ★★ : Tableau d'une fonction cube

Soit  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ . Calculer  $f'(x)$ , l'étudier, puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5 ★★ : Extremums

Soit  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ .

1. Calculer et factoriser  $f'(x)$ .
2. Déterminer les extremums locaux de  $f$  (abscisses, valeurs, nature).

### Exercice 6 ★★ : Aire maximale

Un rectangle a un périmètre de 24 cm. On note  $x$  sa largeur.

1. Exprimer l'aire  $A(x)$  en fonction de  $x$  (et préciser l'intervalle).
2. Étudier  $A$  et déterminer l'aire maximale.

### Exercice 7 ★★ : Enclos contre un mur

On dispose de 60 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire **contre un mur** (le mur sert d'un des côtés, on ne grille donc que trois côtés). On note  $x$  la largeur (les deux côtés perpendiculaires au mur).

1. Exprimer la longueur, puis l'aire  $A(x)$ .
2. Déterminer les dimensions qui maximisent l'aire, et cette aire maximale.

**Exercice 8** ★★★ : La fonction  $x + \frac{1}{x}$ 

Soit  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$ .

1. Calculer  $f'(x)$  et l'écrire sous la forme  $\frac{x^2 - 1}{x^2}$ .
2. Étudier les variations de  $f$  et en déduire son minimum.
3. En déduire que  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  pour tout  $x > 0$ .

**Exercice 9** ★★★ : Position relative

Comparer les courbes de  $f(x) = x^3$  et  $g(x) = x$  : étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  et préciser, selon  $x$ , laquelle est au-dessus.

**Exercice 10** ★★★ : Inégalité

Montrer, par une étude de fonction, que pour tout réel  $x$  :  $x^2 \geq 2x - 1$ .

**Exercice 11** ★★★ : Tangentes horizontales

Soit  $f(x) = x^3 - 3x^2$ .

1. Déterminer les points où la tangente à la courbe est horizontale.
2. Préciser la nature de chacun (max ou min).

**Exercice 12** ★★★ : Rectangle inscrit sous une parabole

On inscrit un rectangle sous la parabole  $y = 9 - x^2$  : sa base est sur l'axe des abscisses et ses deux sommets supérieurs sont sur la parabole, aux abscisses  $-x$  et  $x$  (avec  $0 < x < 3$ ).

1. Montrer que l'aire du rectangle est  $A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$ .
2. Déterminer la valeur de  $x$  qui maximise  $A$ , et l'aire maximale (valeur exacte).

**Exercice 13** ★★★ :  $f'$  s'annule sans extremum

Soit  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = 3(x - 1)^2$ .
2. En déduire que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , bien que  $f'(1) = 0$ . Y a-t-il un extremum en 1 ?

**Exercice 14** ★★★ : Étude complète

Soit  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

1. Calculer et factoriser  $f'(x)$ .
2. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  (avec les valeurs des extremums).
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Tracer l'allure de la courbe (extremums, ordonnée à l'origine).

**Exercice 15** ★★★ : Une inégalité classique

Montrer, par une étude de fonction, que pour tout  $x \geq 0$  :  $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$ .

**Exercice 16** ★★★ : Étude avec un facteur sans racine

Soit  $f(x) = x^4 - 4x$ .

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$ .
2. Justifier que  $x^2 + x + 1 > 0$  pour tout  $x$ , puis en déduire le signe de  $f'(x)$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$  et donner son minimum.

**Exercice 17** ★★★ : Boîte de coût minimal

On fabrique une boîte **sans couvercle**, à base carrée de côté  $x$  (en mètres) et de hauteur  $h$ , de volume  $4\text{ m}^3$ .

1. Justifier que  $h = \frac{4}{x^2}$ , puis que l'aire de tôle utilisée est  $A(x) = x^2 + \frac{16}{x}$  (pour  $x > 0$ ).
2. Étudier  $A$  et déterminer les dimensions qui minimisent l'aire, ainsi que cette aire minimale.

**Exercice 18** ★★★ : Lecture graphique

La courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  monte sur  $]-\infty; 1[$ , redescend sur  $]1; 4[$ , puis remonte sur  $]4; +\infty[$ .

1. Donner le signe de  $f'(x)$  sur chacun des intervalles.
2. En quels points la tangente à la courbe est-elle horizontale ? Préciser la nature des extremums.

**Exercice 19** ★★★ : Périmètre minimal

Un rectangle a une aire de  $36\text{ m}^2$ . On note  $x$  sa largeur (en m).

1. Exprimer la longueur, puis le périmètre  $P(x) = 2x + \frac{72}{x}$  (pour  $x > 0$ ).
2. Étudier  $P$  et déterminer les dimensions qui minimisent le périmètre.

**Exercice 20** ★★★ : Courbe et tangente

Soit  $f(x) = x^3$  et la droite  $\mathcal{D} : y = 3x - 2$ .

1. Vérifier que  $\mathcal{D}$  est tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1.
2. Étudier le signe de  $f(x) - (3x - 2)$  en factorisant  $x^3 - 3x + 2$ .
3. En déduire la position de la courbe par rapport à  $\mathcal{D}$ .

**6 Problème : Étude complète d'une cubique** ★★★**Problème style prépa**

On étudie la fonction  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  sur l'intervalle  $[0; 4]$  (par exemple un modèle de concentration). Ce problème rassemble tout le chapitre : dérivée et signe, tableau de variations, extremums, inégalité, et position relative par rapport à une droite.

**Partie A : variations et extremums**

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ .
2. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; 4]$ .
3. Calculer  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(3)$  et  $f(4)$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 4]$ . Préciser le maximum et le minimum.

### Partie B : une inégalité

4. Dédurre du tableau que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0; 4]$ .
5. Pour quelles valeurs de  $x$  a-t-on  $f(x) = 0$  ?

### Partie C : position par rapport à une droite

6. On considère la droite  $\mathcal{D} : y = x$ . Étudier le signe de  $f(x) - x$  en factorisant  $x^3 - 6x^2 + 8x$ .
7. En déduire, sur  $[0; 4]$ , les positions relatives de la courbe de  $f$  et de la droite  $\mathcal{D}$ , et leurs points d'intersection.

### Partie D : tangente et tracé

8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 2.
9. À l'aide de tout ce qui précède, tracer l'allure de la courbe de  $f$  sur  $[0; 4]$  (extremums, intersections avec  $\mathcal{D}$ ).

## 7 ✓ Corrigés détaillés

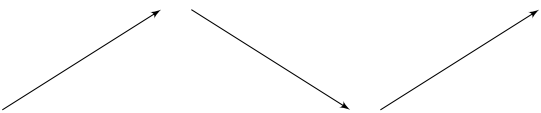
### Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Cherche d'abord seul, puis compare.

### Corrigé 1

#### Démonstration

1. On reporte le signe de  $f'$  et on en déduit les flèches :

$x$	$-\infty$	$-2$	$3$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$						

2. En  $-2$ ,  $f'$  passe de  $+$  à  $-$  : c'est un **maximum** local. En  $3$ ,  $f'$  passe de  $-$  à  $+$  : c'est un **minimum** local.

### Corrigé 2

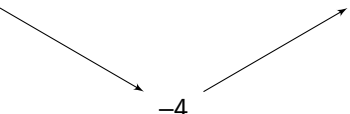
#### Démonstration

- a)  $f'(x) = 2x - 6$  : positif pour  $x > 3$ , négatif pour  $x < 3$ .
- b)  $g'(x) = -2x + 4$  : positif pour  $x < 2$ , négatif pour  $x > 2$ .
- c)  $h'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$  : positif sur  $]-\infty; 0[$  et  $]2; +\infty[$ , négatif sur  $]0; 2[$ .
- d)  $k'(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$  : positif à l'extérieur de  $[-1; 1]$ , négatif entre  $-1$  et  $1$ .

### Corrigé 3

#### Démonstration

$f'(x) = 2x - 6$ , qui s'annule en  $x = 3$  ( $f' < 0$  avant,  $f' > 0$  après). On calcule  $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$ .

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$			

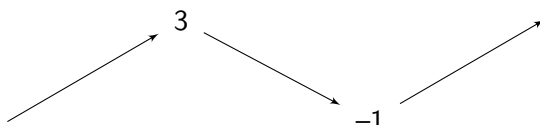
$f$  admet un **minimum** égal à  $-4$  en  $x = 3$ .



## Corrigé 4

## Démonstration

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$  : positif à l'extérieur de  $[-1; 1]$ , négatif entre.  $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$  (max),  $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$  (min).

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$					

## Corrigé 5

## Démonstration

1.  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$ .

2.  $f'$  est positive à l'extérieur de  $[-1; 2]$ , négative entre. Donc  $f$  admet un **maximum** local en  $x = -1$  et un **minimum** local en  $x = 2$ .

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 5 = -2 - 3 + 12 + 5 = 12,$$

$$f(2) = 2 \times 8 - 3 \times 4 - 12 \times 2 + 5 = 16 - 12 - 24 + 5 = -15.$$

Maximum local 12 en  $x = -1$ , minimum local -15 en  $x = 2$ .

## Corrigé 6

## Démonstration

1. Périmètre 24 donc largeur + longueur = 12 : longueur =  $12 - x$ . Aire :  $A(x) = x(12 - x) = 12x - x^2$ , pour  $0 < x < 12$ .

2.  $A'(x) = 12 - 2x$ , qui s'annule en  $x = 6$  ( $A' > 0$  avant,  $A' < 0$  après) : **maximum** en  $x = 6$ .  $A(6) = 6 \times 6 = 36$ . L'aire maximale est  $36 \text{ cm}^2$  (un carré de côté 6).

## Corrigé 7

## Démonstration

1. On grille deux largeurs  $x$  et une longueur  $L$  :  $2x + L = 60$ , donc  $L = 60 - 2x$ . Aire :  $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$ , pour  $0 < x < 30$ .

2.  $A'(x) = 60 - 4x$ , qui s'annule en  $x = 15$  ( $A' > 0$  avant,  $A' < 0$  après) : **maximum**. Alors  $L = 60 - 30 = 30$  et  $A(15) = 15 \times 30 = 450$ . Aire maximale  $450 \text{ m}^2$  pour une largeur de 15 m et une longueur de 30 m.

## Corrigé 8

## Démonstration

$$1. f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

2. Sur  $]0; +\infty[$ ,  $x^2 > 0$  donc le signe de  $f'$  est celui de  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ . Comme  $x > 0$ ,  $x + 1 > 0$  : le signe est celui de  $x - 1$ . Donc  $f' < 0$  sur  $]0; 1[$  et  $f' > 0$  sur  $]1; +\infty[$  :  $f$  admet un **minimum** en  $x = 1$ ,  $f(1) = 1 + 1 = 2$ .

3. Le minimum de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  vaut 2, donc  $f(x) \geq 2$  pour tout  $x > 0$ , c'est-à-dire  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

## Corrigé 9

## Démonstration

$f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$ . Tableau de signes (racines  $-1, 0, 1$ ) :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$x^3 - x$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

Donc la courbe de  $f$  est **au-dessus** de celle de  $g$  sur  $] -1; 0[$  et  $]1; +\infty[$ , et **en dessous** sur  $] -\infty; -1[$  et  $]0; 1[$ . Elles se croisent en  $x = -1, 0$  et  $1$ .

## Corrigé 10

## Démonstration

Posons  $f(x) = x^2 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1$ . Alors  $f'(x) = 2x - 2$ , qui s'annule en  $x = 1$  ( $f' < 0$  avant,  $f' > 0$  après) : minimum en  $x = 1$ , et  $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ . Donc  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$ , c'est-à-dire  $x^2 \geq 2x - 1$ . (On reconnaît d'ailleurs  $f(x) = (x - 1)^2 \geq 0$ .)

## Corrigé 11

## Démonstration

1.  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ , qui s'annule en  $x = 0$  et  $x = 2$ . Points :  $f(0) = 0$  et  $f(2) = 8 - 12 = -4$ , soit  $(0; 0)$  et  $(2; -4)$ .

2.  $f'$  est positive sur  $] -\infty; 0[$ , négative sur  $]0; 2[$ , positive sur  $]2; +\infty[$ . En  $x = 0$  ( $+$   $\rightarrow$   $-$ ) : **maximum** local. En  $x = 2$  ( $-$   $\rightarrow$   $+$ ) : **minimum** local.

## Corrigé 12

## Démonstration

1. Le rectangle a pour largeur  $2x$  (de  $-x$  à  $x$ ) et pour hauteur  $9 - x^2$  (l'ordonnée du point de la parabole). Donc  $A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$ .

2.  $A'(x) = 18 - 6x^2 = 6(3 - x^2)$ , qui s'annule (sur  $]0; 3[$ ) en  $x = \sqrt{3}$  ( $A' > 0$  avant,  $A' < 0$  après) : **maximum**. L'aire maximale vaut

$$A(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^3 = 18\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20,8.$$

## Corrigé 13

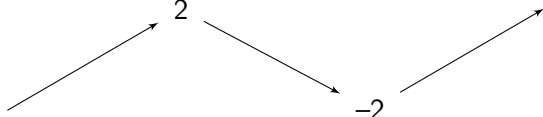
## Démonstration

1.  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$ .
2. Un carré est toujours  $\geq 0$ , donc  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x$ , et  $f'(x) = 0$  **seulement** en  $x = 1$ . La dérivée ne change donc **pas** de signe :  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . Même si  $f'(1) = 0$ , il n'y a **pas d'extremum** en 1 (la courbe  $y$  présente une tangente horizontale puis repart à la hausse : point d'inflexion).

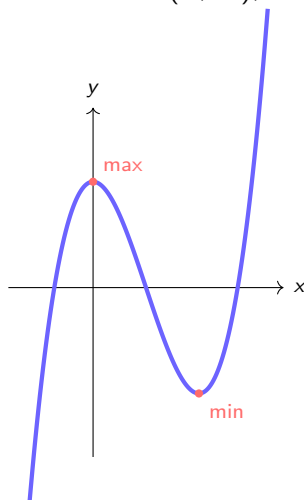
## Corrigé 14

## Démonstration

1.  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ .
2.  $f' > 0$  sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f' < 0$  sur  $]0; 2[$ ,  $f' > 0$  sur  $]2; +\infty[$ .  $f(0) = 2$  (max local),  $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$  (min local).

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$						

3.  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = 0$  : tangente horizontale  $y = 2$ .
4. Allure : maximum local  $(0; 2)$ , minimum local  $(2; -2)$ , ordonnée à l'origine 2.



## Corrigé 15

*Démonstration*

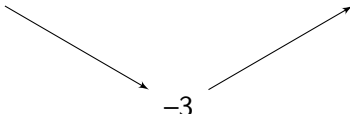
Posons  $f(x) = \frac{x+1}{2} - \sqrt{x}$  sur  $[0; +\infty[$ . Alors

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Le dénominateur est positif, donc le signe de  $f'$  est celui de  $\sqrt{x}-1$  :  $f' < 0$  sur  $]0; 1[$ ,  $f' > 0$  sur  $]1; +\infty[$ .  $f$  admet donc un **minimum** en  $x = 1$  :  $f(1) = \frac{2}{2} - 1 = 0$ . Ainsi  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ , c'est-à-dire  $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$ .

**Corrigé 16***Démonstration*

1.  $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$ . Comme  $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ , on a  $f'(x) = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$ .
2. Le trinôme  $x^2 + x + 1$  a pour discriminant  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$  et son coefficient dominant est positif : il est donc **strictement positif** pour tout  $x$ . Le signe de  $f'$  est alors celui de  $4(x-1)$ , c'est-à-dire le signe de  $x-1$  :  $f' < 0$  sur  $]-\infty; 1[$ ,  $f' > 0$  sur  $]1; +\infty[$ .
3.  $f$  décroît puis croît : **minimum** en  $x = 1$ ,  $f(1) = 1 - 4 = -3$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$			

**Corrigé 17***Démonstration*

1. Le volume est (base)  $\times$  (hauteur)  $= x^2 h = 4$ , donc  $h = \frac{4}{x^2}$ . L'aire comprend le fond ( $x^2$ ) et les quatre côtés ( $4xh$ ) :  $A = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$ .
2.  $A'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2}$ . Sur  $]0; +\infty[$ ,  $x^2 > 0$  donc le signe de  $A'$  est celui de  $x^3 - 8$ , qui s'annule en  $x = 2$  :  $A' < 0$  sur  $]0; 2[$ ,  $A' > 0$  sur  $]2; +\infty[$ . **Minimum** en  $x = 2$  :  $A(2) = 4 + 8 = 12$ . Dimensions optimales : côté  $x = 2$  m et hauteur  $h = 1$  m, pour une aire minimale de  $12 \text{ m}^2$ .

## Corrigé 18

## Démonstration

1. La courbe monte sur  $] -\infty ; 1[$  donc  $f' > 0$  ; elle descend sur  $] 1 ; 4[$  donc  $f' < 0$  ; elle remonte sur  $] 4 ; +\infty[$  donc  $f' > 0$ .
2. La tangente est horizontale là où  $f' = 0$ , soit en  $x = 1$  et  $x = 4$ . En  $x = 1$  ( $+$   $\rightarrow$   $-$ ) : **maximum**. En  $x = 4$  ( $-$   $\rightarrow$   $+$ ) : **minimum**.

## Corrigé 19

## Démonstration

1. L'aire vaut largeur  $\times$  longueur = 36, donc la longueur est  $\frac{36}{x}$ . Le périmètre est  $P(x) = 2\left(x + \frac{36}{x}\right) = 2x + \frac{72}{x}$ , pour  $x > 0$ .
2.  $P'(x) = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2(x^2 - 36)}{x^2}$ . Sur  $] 0 ; +\infty[$ , le signe est celui de  $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$ , soit (puisque  $x > 0$ ) celui de  $x - 6$  :  $P' < 0$  sur  $] 0 ; 6[$ ,  $P' > 0$  sur  $] 6 ; +\infty[$ . **Minimum** en  $x = 6$  :  $P(6) = 12 + 12 = 24$ . Le périmètre est minimal pour un **carré** de côté 6 m ( $P = 24$  m).

## Corrigé 20

## Démonstration

1.  $f(1) = 1$  et  $f'(x) = 3x^2$  donc  $f'(1) = 3$ . La tangente en  $x = 1$  est  $y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2 = \mathcal{D}$  :  $\mathcal{D}$  est donc tangente à la courbe en  $x = 1$ .
2.  $f(x) - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$ . Comme 1 est racine :  $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$ .
3.  $(x - 1)^2 \geq 0$ , donc le signe est celui de  $x + 2$  : la courbe est **au-dessus** de  $\mathcal{D}$  sur  $] -2 ; +\infty[$  (avec contact en  $x = 1$ ) et **en dessous** sur  $] -\infty ; -2[$ .

## Corrigé du problème : Étude d'une cubique

## Démonstration / Partie A : variations

1.  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$ .
2. Sur  $[0 ; 4]$ , le trinôme  $(x - 1)(x - 3)$  est positif à l'extérieur de  $[1 ; 3]$  et négatif entre. Donc  $f' > 0$  sur  $[0 ; 1[$ ,  $f' < 0$  sur  $] 1 ; 3[$ ,  $f' > 0$  sur  $] 3 ; 4]$ .
3.  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ ,  $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$ ,  $f(4) = 64 - 96 + 36 = 4$ .

$x$	0	1	3	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$	0	4	0	4	

Sur  $[0 ; 4]$ , le **maximum** de  $f$  vaut 4 (atteint en  $x = 1$  et  $x = 4$ ) et le **minimum** vaut 0 (atteint en

$x = 0$  et  $x = 3$ ).

*Démonstration / Partie B : inégalité*

4. D'après le tableau,  $f$  varie entre 0 et 4 sur  $[0; 4]$  ; en particulier  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0; 4]$ .  
 5.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$ . Donc  $f(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$  ou  $x = 3$ .

*Démonstration / Partie C : position par rapport à  $\mathcal{D}$*

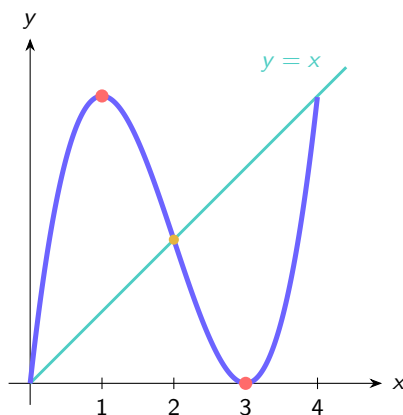
6.  $f(x) - x = x^3 - 6x^2 + 9x - x = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x-2)(x-4)$ . Sur  $[0; 4]$ , tableau de signes (racines 0, 2, 4) :

$x$	0	2	4		
$x(x-2)(x-4)$	0	+	0	-	0

7. Donc, sur  $[0; 4]$  : la courbe de  $f$  est **au-dessus** de  $\mathcal{D}$  sur  $]0; 2[$ , **en dessous** sur  $]2; 4[$  ; elles se croisent en  $x = 0$ ,  $x = 2$  et  $x = 4$ .

*Démonstration / Partie D : tangente et tracé*

8.  $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$  et  $f'(2) = 3(2-1)(2-3) = 3 \times 1 \times (-1) = -3$ . Tangente :  $y = f(2) + f'(2)(x-2) = 2 - 3(x-2) = -3x + 8$ .  
 9. Allure de la courbe sur  $[0; 4]$  (maximum (1; 4), minimum (3; 0), intersections avec  $y = x$  en 0, 2, 4) :



**Bilan de la fiche.** Tu sais désormais : relier le **signe de  $f'$**  aux variations de  $f$ , dresser un tableau de variations, trouver les extremums (avec changement de signe de  $f'$ ), résoudre un problème d'optimisation, démontrer une inégalité en étudiant un minimum, et comparer deux courbes via le signe de  $f - g$ . C'est la boîte à outils d'analyse que tu utiliseras sur toutes les fonctions, jusqu'en Terminale.